Étude de l'écoulement de l'eau
Éléments de correction

I. Caractéristiques en hydrostatique.

1. La hauteur d'eau dans l'ensemble des 19 tubes piézométriques est la même donc la pression aux points n°1 à 19 est la même.

2. Vérifions que la pression est la même au niveau de chacun des points n°1 à 19 en utilisant la relation de Bernoulli pour un fluide parfait. Par exemple aux points n°A et n°B :

$$\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_{\text{A}}^2+\rho\cdot g\cdot z_{\text{A}}+P_{\text{A}}=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_{\text{B}}^2+\rho\cdot g\cdot z_{\text{B}}+P_{\text{B}}$$

or la circulation de l'eau est arrêtée donc la vitesse v est nulle en A et en B donc

$$\rho\cdot g\cdot z_{\text{A}}+P_{\text{A}}=\rho\cdot g\cdot z_{\text{B}}+P_{\text{B}}$$

or les canalisations sont horizontales donc l'altitude z est la même en A et en B donc

$$P_{\text{A}}=P_{\text{B}}$$

la pression est donc la même aux points n°A et n°B (et il en est donc de même au niveau de chacun des points n°1 à 19).

3. La hauteur d'eau vaut par exemple 3,3 cm donc

$$P_i=P_{\text{atm}}+\rho_{\text{eau}}\cdot g\cdot h_i=101325+1000\times 9,81\times 3,3\times 10^{-2}=101325+324=101649\text{ Pa}$$

II. Observation de l'effet général du débit.

4. On remarque que, plus la vanne d'entrée A est ouverte et plus la hauteur d'eau dans les tubes piézométriques est élevée (mais elle n'est pas la même dans tous les tubes piézométriques).

III. Mesure du débit.

5. Le débit (approximatif) est lu sur le débitmètre à flotteur. On fixe un débit de 650 L/h.
Pour mesurer ensuite ce débit avec précision, on utilise le graphique de la dernière page de l'énoncé. En lisant bien le titre de ce graphique, on constate qu'il faut mesurer la <u>différence</u> de hauteur d'eau Δh dans les tubes piézométriques du <u>diaphragme</u>.
On mesure par exemple Δh = 52,9 cm - 27,8 cm = 25,1 cm.
En reportant cette valeur sur le graphique de la première page de l'énoncé, on trouve un débit q_V = 11,1 L/min (les graduations sont chaque 0,2 L/min !) soit 666 L/h.

IV. Tube de Venturi.

6. La différence de hauteur d'eau dans les tubes piézométriques du Venturi vaut par exemple
Δh = 26,4 cm - 12,7 cm = 13,7 cm.

$$q_V=k\times\sqrt{\Delta h}\quad\text{avec}\quad k=\sqrt{2\cdot g\cdot\frac{S_1^2\cdot S_2^2}{S_1^2-S_2^2}}$$

avec S_i les sections de la canalisation qui se calculent à partir des rayons R_i ou des diamètres D_i que l'on peut trouver (en mm) sur la documentation de la dernière page de cet énoncé :

$$S_1=\pi\cdot R_1^2=\pi\cdot\left(\frac{D_1}{2}\right)^2=\pi\times\left(\frac{21\times 10^{-3}}{2}\right)^2=3,5\times 10^{-4}\text{ m}^2$$

et $$S_2=\pi\cdot R_2^2=\pi\cdot\left(\frac{D_2}{2}\right)^2=\pi\times\left(\frac{12\times 10^{-3}}{2}\right)^2=1,1\times 10^{-4}\text{ m}^2$$

donc $k=\sqrt{2\cdot g\cdot\dfrac{S_1^2\cdot S_2^2}{S_1^2-S_2^2}}=\sqrt{2\times 9,81\times\dfrac{(3,5\times10^{-4})^2\times(1,1\times10^{-4})^2}{(3,5\times10^{-4})^2-(1,1\times10^{-4})^2}}=5,1\times10^{-4}$ unités SI

et $q_V=k\times\sqrt{\Delta h}=5,1\times10^{-4}\times\sqrt{13,7\times10^{-2}}=1,9\times10^{-4}$ m³/s

7. Le débit obtenu à la partie III est q_V = 11,1 L/min = $1,85\times10^{-4}$ m³/s
ce qui est en accord avec les $1,9\times10^{-4}$ m³/s trouvé à l'aide du tube de Venturi.

8. $\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2+\rho\cdot g\cdot z_1+P_1=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_2^2+\rho\cdot g\cdot z_2+P_2$

mais $z_1=z_2$ donc $\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2+P_1=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_2^2+P_2$

donc $\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_2^2-\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2=P_1-P_2$

or $P_1-P_2=\Delta P_{12}=\rho\cdot g\cdot\Delta h$

donc $\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_2^2-\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2=\rho\cdot g\cdot\Delta h$

or $v=\dfrac{q_V}{S}$ donc $\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\dfrac{q_V^2}{S_2^2}-\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\dfrac{q_V^2}{S_1^2}=\rho\cdot g\cdot\Delta h$ donc $\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot q_V^2\cdot\left(\dfrac{1}{S_2^2}-\dfrac{1}{S_1^2}\right)=\rho\cdot g\cdot\Delta h$

donc $\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot q_V^2\dfrac{S_1^2-S_2^2}{S_1^2\cdot S_2^2}=\rho\cdot g\cdot\Delta h$ donc $q_V^2=2\cdot g\cdot\Delta h\cdot\dfrac{S_1^2\cdot S_2^2}{S_1^2-S_2^2}$

donc $q_V=\sqrt{2\cdot g\cdot\Delta h\dfrac{S_1^2\cdot S_2^2}{S_1^2-S_2^2}}=\sqrt{2\cdot g\dfrac{S_1^2\cdot S_2^2}{S_1^2-S_2^2}}\times\sqrt{\Delta h}=k\times\sqrt{\Delta h}$

avec $k=\sqrt{2\cdot g\cdot\dfrac{S_1^2\cdot S_2^2}{S_1^2-S_2^2}}$

Le tube de Venturi permet donc de mesurer des débits d'écoulement de fluides
(il suffit de mesurer la différence de hauteur de fluide).

V. Pertes de charge régulières.

9. En observant bien le banc de dynamique des fluides, on peut dire que :
La vitesse de l'eau : ne varie pas ; car la section de la canalisation ne varie pas.
L'altitude de l'eau : ne varie pas ; car la canalisation est horizontale.
Et donc, si on utilise le théorème de Bernoulli pour un fluide parfait (qui dit que la charge de l'eau ne varie pas), on en déduit que :
La pression de l'eau : ne varie pas ; car la charge $P_{\text{tot}}=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v^2+\rho\cdot g\cdot z+P$ (qui ne varie pas) est la somme d'un terme ($\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v^2$) qui ne varie pas, d'un terme ($\rho\cdot g\cdot z$) qui ne varie pas et d'un terme (P) qui ne varie donc pas.

10. Du tube piézométrique n°2 au n°4, on constate que la hauteur d'eau diminue donc que la pression diminue du point n°2 au point n°4 : plus la distance parcourue est grande et plus la pression diminue.

11. Donc, en observant bien le banc de dynamique des fluides, on peut dire que :
La pression de l'eau : diminue ; voir question précédente.
La vitesse de l'eau : ne varie pas ; car la section de la canalisation ne varie pas.
L'altitude de l'eau : ne varie pas ; car la canalisation est horizontale.
Et donc la charge de l'eau : diminue ; en effet la charge $P_{\text{tot}}=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v^2+\rho\cdot g\cdot z+P$ est la somme d'un terme ($\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v^2$) qui ne varie pas, d'un terme ($\rho\cdot g\cdot z$) qui ne varie pas et d'un terme (P) qui diminue donc elle diminue.
Attention : On ne peut pas utiliser la relation de Bernoulli du fluide parfait (contrairement à ce que nous avons tenté à la question 9) qui nous indiquerait que rien ne varie (alors que l'on constate bien que la pression diminue). En effet, ici l'eau ne peut pas être considérée comme un fluide parfait à cause des frottements !

12. La charge de l'eau diminue signifie que son énergie mécanique diminue. En effet, à cause des frottements, une partie de son énergie mécanique devient de l'énergie thermique.

13. La variation de charge (ici uniquement due aux frottements) est

$$\Delta P_{\text{tot}} = P_{\text{tot final}} - P_{\text{tot initial}} = \frac{1}{2}\rho v_{\text{final}}^2 + \rho g z_{\text{final}} + P_{\text{final}} - \frac{1}{2}\rho v_{\text{initial}}^2 - \rho g z_{\text{initial}} - P_{\text{initial}}$$

or, ici, v = cste et z = cste donc $\Delta P_{\text{tot}} = P_{\text{final}} - P_{\text{initial}}$

la perte de charge est donc ici perte de charge $= -\Delta P_{\text{tot}} = P_{\text{initial}} - P_{\text{final}}$

or, en utilisant les tubes piézométriques, $P_{\text{initial}} = P_{\text{atm}} + \rho \cdot g \cdot h_{\text{initial}}$ et $P_{\text{final}} = P_{\text{atm}} + \rho \cdot g \cdot h_{\text{final}}$

donc perte de charge $= P_{\text{atm}} + \rho \cdot g \cdot h_{\text{initial}} - P_{\text{atm}} + \rho \cdot g \cdot h_{\text{final}} = \rho \cdot g \cdot (h_{\text{initial}} - h_{\text{final}})$

14. La hauteur d'eau dans le tube piézométrique n°2 est h_2 = 34,3 cm.
La hauteur d'eau dans le tube piézométrique n°3 est h_3 = 33,0 cm.
La hauteur d'eau dans le tube piézométrique n°4 est h_4 = 30,8 cm.
La perte de charge se calcule ici avec la formule :

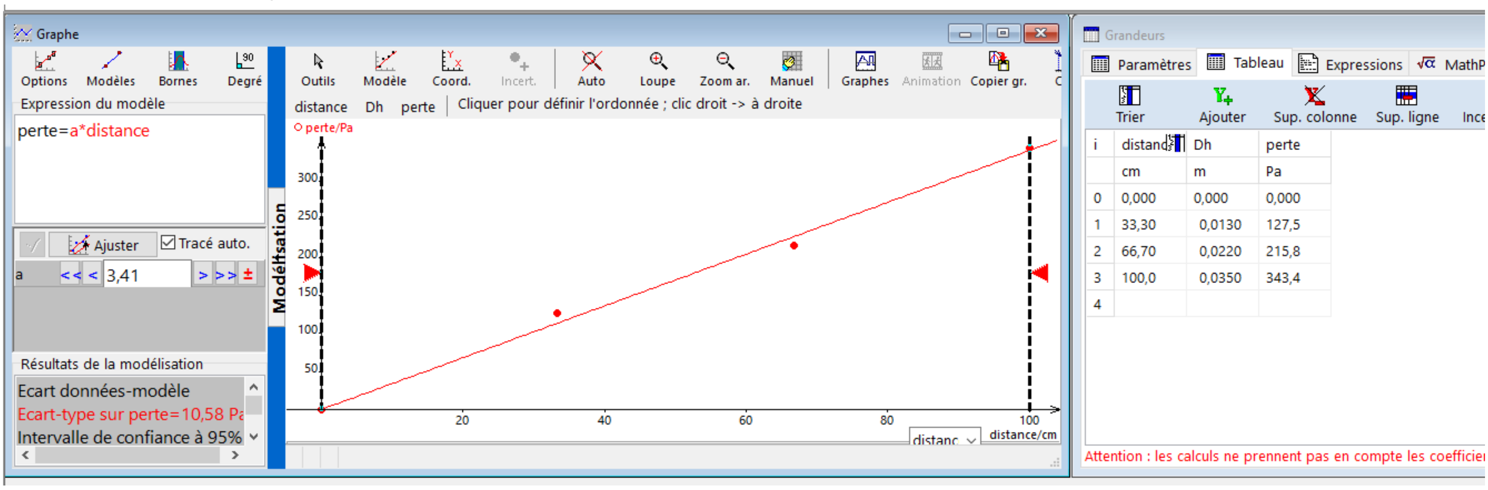
$$\text{perte de charge} = -\Delta P_{\text{tot}} = \rho \cdot g \cdot (h_{\text{initial}} - h_{\text{final}}) = 1000 \times 9{,}81 \times (h_{\text{initial}} - h_{\text{final}})$$

Entre les points n°2 et 3, $h_2 - h_3$ = 34,3 – 33,0 = 1,3 cm.
Entre les points n°3 et 4, $h_3 - h_4$ = 33,0 – 30,8 = 2,2 cm.
Entre les points n°2 et 4, $h_2 - h_4$ = 34,3 – 30,8= 3,5 cm.
Entre les points n°2 et 2, $h_2 - h_2$ = 0 cm.
En faisant bien attention à utiliser les unités du système international (entre autres, les hauteurs sont en mètres).

distance	0 cm	33,3 cm	66,7 cm	100 cm
$\Delta h = h_{initial} - h_{final}$	0 m	0,013 m	0,022 m	0,035 m
perte de charge	0 Pa	128 Pa	216 Pa	343 Pa

Avec un débit identique à celui de la partie III soit q_V = 11,1 L/min.

15. Le tracé graphique de la perte de charge en fonction de la distance parcourue permet de constater que les points peuvent être modélisés par une droite passant par l'origine. Donc la perte de charge est proportionnelle à la distance parcourue.



16. Lorsque le débit est plus faible, on obtient le même type de résultats (la perte de charge est proportionnelle à la distance parcourue) mais la perte de charge est plus faible car, à plus basse vitesse, les frottements sont plus faibles.

VI. Pertes de charge singulières.

17. Pour mesurer l'évolution de la pression de l'eau lorsque son écoulement horizontal subit 1 changement assez brusque de direction en angle droit, on utilise les points n°7 et 8 (entre les points n°5 et 6, le changement de direction est aussi en angle droit mais il est beaucoup moins brusque).

18. Du tube piézométrique n°7 au n°8, on constate que la hauteur d'eau diminue donc que la pression diminue du point n°7 au point n°8.

La pression de l'eau : diminue ; voir ci-dessus.
La vitesse de l'eau : ne varie pas ; car la section de la canalisation ne varie pas.
L'altitude de l'eau : ne varie pas ; car la canalisation est horizontale.
Et donc la charge de l'eau : diminue ; en effet la charge $P_{tot} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot z + P$ est la somme d'un terme ($\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$) qui ne varie pas, d'un terme ($\rho \cdot g \cdot z$) qui ne varie pas et d'un terme (P) qui diminue donc elle diminue.

19. La charge de l'eau diminue signifie que son énergie mécanique diminue. En effet, à cause des frottements, une partie de son énergie mécanique devient de l'énergie thermique.

20. La hauteur d'eau dans le tube piézométrique n°7 est h_7 = 28,6 cm.
La hauteur d'eau dans le tube piézométrique n°8 est h_8 = 26,3 cm.
La perte de charge se calcule ici avec la formule :

$$\text{perte de charge} = \rho \cdot g \cdot (h_{\text{initial}} - h_{\text{final}}) = \rho \cdot g \cdot (h_7 - h_8) = 1000 \times 9,81 \times (28,6 \times 10^{-2} - 26,3 \times 10^{-2}) = 226 \text{ Pa}$$

21. Pour mesurer l'évolution de la pression de l'eau lorsque son écoulement horizontal subit 1 changement pas trop brusque de direction en angle droit, on utilise les points n°5 et 6.

22. La hauteur d'eau dans le tube piézométrique n°5 est h_5 = 30,3 cm.
La hauteur d'eau dans le tube piézométrique n°6 est h_6 = 29,1 cm.
La perte de charge $-\Delta P_{tot}$ se calcule ici avec la formule :

$$\text{perte de charge} = \rho \cdot g \cdot (h_{\text{initial}} - h_{\text{final}}) = \rho \cdot g \cdot (h_5 - h_6) = 1000 \times 9,81 \times (30,3 \times 10^{-2} - 29,1 \times 10^{-2}) = 118 \text{ Pa}$$

23. On remarque que la perte de charge est bien plus importante lorsque le changement de direction est brusque que lorsqu'il n'est pas trop brusque (ici, respectivement 226 Pa et 118 Pa).
Donc, si l'on ne veut pas trop de perte de charges, il vaut mieux que les rayons de courbure des changements de direction soient assez grands.

24. Pour mesurer l'évolution de la pression de l'eau lorsque son écoulement horizontal subit une augmentation brusque de section, on utilise les points n°11 et 12 (entre les points n°12 et 13, il s'agit d'une réduction brusque de section).

25. Du tube piézométrique n°11 au n°12, on constate que la hauteur d'eau ne change pas donc que la pression ne change pas du point n°11 au point n°12.
La pression de l'eau : ne varie pas ; voir ci-dessus.
La vitesse de l'eau : diminue ; car la section de la canalisation augmente (le débit volumique q_V est uniforme et vaut $q_V = S \cdot v$ donc si la section S augmente, la vitesse v diminue).
L'altitude de l'eau : ne varie pas ; car la canalisation est horizontale.
Et donc la charge de l'eau : diminue ; en effet la charge $P_{tot} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot z + P$ est la somme d'un terme ($\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$) qui diminue, d'un terme ($\rho \cdot g \cdot z$) qui ne varie pas et d'un terme (P) qui ne varie pas donc elle diminue.

26. La charge de l'eau diminue signifie que son énergie mécanique diminue. En effet, à cause des frottements, une partie de son énergie mécanique devient de l'énergie thermique.